

Конденсационная теория стационарных смерчей

А.М.Макарьева, В.Г.Горшков, А.В.Нефёдов*

Отделение теоретической физики, Петербургский институт ядерной физики, 188300, г. Гатчина, Ленинградская область

*anef@thd.pnpi.spb.ru

Аннотация

Найдено решение уравнения Бернулли при конденсации водяного пара для стационарного центрально-симметричного смерча. Полученные профили вертикальной, радиальной и тангенциальной скоростей ветра в зависимости от удаления от центра конденсации согласуются с наблюдениями для Мулхаллского торнадо – крупнейшего в истории наблюдений, а также наиболее долгоживущего из трех торнадо, для которых сегодня имеются данные по трехмерной циркуляции. Оценены максимально возможные скорости вихря.

1. Конденсационный потенциал давления

Циркуляция смерча, обусловленная конденсацией водяного пара, может быть описана следующим образом. Конденсация водяного пара с парциальным давлением p_v у земной поверхности при адиабатическом подъеме влажного воздуха приводит к падению давления воздуха на величину $\Delta p = p_v$. Падение давление по вертикали поддерживает восходящие потоки воздуха с вертикальной скоростью w и вызывает компенсирующие подъем сходящиеся к центру конденсации радиальные потоки со скоростью u . Сходящиеся радиальные потоки максимальны у земной поверхности, где падение давления достигает наибольшей величины. Радиальная скорость приближается к нулю на некоторой высоте $z=h$, совпадающей по порядку величины с высотой облачности. Большая величина вертикальной скорости w выносит жидкую фазу конденсации в область расходящихся потоков $z > h$ и вызывает осадки на значительном удалении от центра области конденсации.

Уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат связывает скорости u и w радиально-симметричного вихря соотношением $w = (h/r)(\partial u / \partial r)$. Силы

градиентов давления равны $\Delta p / h$ в вертикальном и $\partial p / \partial r$ в горизонтальном направлениях. Равенство мощностей горизонтального и вертикального потоков воздуха $u(\partial p / \partial r) = w(\Delta p / h)$ с учетом уравнения неразрывности приводят к соотношению $\partial p / \partial r = \Delta p (ur)^{-1} (\partial ur / \partial r)$. Это соответствует конденсационному потенциалу давления $p = \Delta p \ln ur + \text{const}$ [1]. Его строгий вывод приведен в работе [2].

2. Интеграл Бернулли для конденсационных смерчей

Смерч, как и ураган, развивается только в том случае, когда сила конденсационного градиента давления существенно превосходит силы трения. В этом случае уравнения Эйлера обладают интегралом Бернулли на линии тока, имеющим вид:

$$B(r) = \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2 + v^2) + \Delta p \ln ur = B(r_1), \quad (1)$$

$$p(r) = p_1 + \Delta p \ln ur, \quad \Delta p = p_v \equiv \rho \frac{u_c^2}{2}, \quad (2)$$

$$p_1 \equiv p(r_1), \quad w = \frac{h}{r} \frac{\partial ur}{\partial r}, \quad v = \frac{a}{r}. \quad (3)$$

Здесь u , w и v – радиальная, вертикальная и тангенциальная скорости ветра, r – расстояние от центра области конденсации, $r = r_1$ – внешняя граница области конденсации, ρ – плотность воздуха, u_c – масштаб скорости, определяемый конденсацией водяного пара, a – угловой момент на единицу массы воздуха, и $z < h$ – область сходящихся радиальных линий тока ($u > 0$). В смерче вертикальная скорость w в (1) не мала и должна быть учтена.

При исследовании интеграла Бернулли удобно перейти к следующим единицам измерения:

$$\Delta p = 1, \quad u_c = 1, \quad \rho = 2, \quad r_1 = 1. \quad (4)$$

В этих единицах интеграл Бернулли и градиент давления становятся безразмерными:

$$B(r) - B(1) = u^2 - u_1^2 + w^2 - w_1^2 + \left(\frac{a^2}{r^2} - a^2 + \ln \frac{ur}{u_1} \right) = 0, \quad (5)$$

$$p(r) = p_1 + \ln \frac{ur}{u_1}, \quad (6)$$

где $u_1 \equiv u(r_1)$, $w_1 \equiv w(r_1)$, $a \equiv v_1 \equiv v(r_1)$.

Введем новую переменную $y \equiv ur / u_1$. Тогда (5) принимает вид нелинейного дифференциального уравнения на y :

$$y' = \frac{r}{u_1 h} \sqrt{u_1^2 \left(h^2 y_1'^2 + 1 - \frac{y^2}{r^2} \right) - \left(\frac{a^2}{r^2} - a^2 + \ln y \right)}, \quad (7)$$

$$w \equiv u_1 \frac{h}{r} y', \quad u \equiv u_1 \frac{y}{r}, \quad v = \frac{a}{r}, \quad p = p_1 + \ln y, \quad (8)$$

$$y \equiv \frac{ur}{u_1}, \quad y' \equiv \frac{dy}{dr}; \quad y_1' \equiv y'(r_1), \quad (9)$$

Вещественное решение (7) существует только при тех значениях r , которые обеспечивают положительность выражения под знаком корня. Внутренний радиус $r = r_0$, на котором прекращается конденсация, соответствует равенству нулю выражения в последней круглой скобке в (5) и (7) при условии $y(r_0) = r_0$, которое эквивалентно условию $u(r_0) = u_1$. Конденсация начинается на $r = r_1$ и кончается на $r = r_0$ при одной и той же радиальной скорости $u(r_1) = u(r_0) = u_1$. Как следует из (7), при этом одновременно выполняются следующие соотношения:

$$\frac{a^2}{r_0^2} - a^2 + \ln r_0 = 0, \quad y_0 \equiv y(r_0) = r_0, \quad (10)$$

$$y_1 \equiv y(r_1) = 1, \quad y_1' \equiv y'(r_1) = r_0 y_1', \quad (11)$$

$$u_0 \equiv u(r_0) = u_1, \quad w_0 \equiv w(r_0) = w_1 = u_1 h y_1'. \quad (12)$$

Радиус $r = r_0$ (10) соответствует переходу всей потенциальной энергии конденсации в тангенциальную кинетическую энергию. При $r < r_0$ вещественных решений (7) для скоростей u , w , v не существует.

Дифференциальное уравнение (7) является уравнением первого порядка при одном граничном условии $y_1 = 1$ ($u(r_1) = u_1$) или $y(r_0) = r_0$ ($u(r_0) = u_1$). Если при фиксированном y_1 рассматривать константу y_1' в (7) как произвольный параметр, то в общем случае область вещественных решений не захватывает точку $r = r_0$. При этом максимальная скорость $v_{\max} \sim a/r_0$ не достигается, и смерч не существует.

Существование смерча возможно в том случае, когда вещественные решения доходят до точки r_0 , определяемой уравнением (10). Решение уравнения (7), являющееся вещественным в области $r_0 \leq r \leq r_1$, получено путем задания граничного условия на y в точке r_0 , $y_0 = r_0$, и подбором константы y_1' при заданных u_1 , a и h так, чтобы выполнялось условие $y_1 = 1$.

3. Сравнение с наблюдениями

Данные по трехмерной циркуляции торнадо (зависимости u , w и v от расстояния r от центра) лишь в последнее время появились в литературе. В настоящее время такие данные имеются для трех торнадо [3-5]. Ниже мы рассматриваем данные для Мулхаллского торнадо (Оклахома, 3 мая 1999) [5]. Это крупнейшее торнадо, зафиксированное на настоящее время [5], было также и наиболее долгоживущим (1 час 20 минут) [6] и наиболее долго наблюдаемым (18 минут) из трех.

Согласно наблюдениям, большинство интенсивных торнадо образуется в том случае, когда средняя относительная влажность при $z \leq 1$ км составляет не менее 75-85% [7]. При характерной температуре поверхности 30 °С [8] и относительной влажности 80% давление водяного пара у поверхности составляет $p_v = \Delta p \approx 30$ hPa. При плотности воздуха $\rho = 1.15$ кг/м³ получаем $u_c = 73$ м/с (2). Торнадо перемещается как целое с так называемой трансляционной скоростью U . Тангенциальные и радиальные скорости v_1 и u_1 на внешнем радиусе $r = r_1$ торнадо должны быть функцией U . Мы определим $u_1 = U/\pi$ [2], учитывая, что при движении торнадо со скоростью U поток влажного воздуха через поперечное сечение торнадо пропорционален $2Ur_1$, а через окружность торнадо тот же самый поток равен $2\pi u_1 r_1$. Тангенциальную скорость $v_1 \equiv v(r_1)$ положим равной $v_1 = 2U/\pi$, полагая, что угловой момент основной линии тока, поставляющей воздух в торнадо (см. рис. 8 в [9]), определяется средним значением $U \cos \alpha$, где $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ – случайный угол между скоростью на этой линии тока и радиус-вектором в точке $r = r_1$ входа этой линии тока в область торнадо. Из $U = 13$ м/с [5] и $u_c = 73$ м/с имеем для безразмерных переменных $u_1 = U/\pi u_c = 0.06$, $v_1 = 2U/\pi u_c = 0.12 = a$. При этом $r_0 = 0.074$ (10). Полагая высоту облаков порядка $h = 1.2$ км и радиус циркуляции торнадо $r_1 = 8.5$ км имеем безразмерное $h = 0.14$ в (7).

Для выбранных таким образом параметров из условий (10) и (11) получаем численное решение уравнения (7) при $y'_1 = 0.03574$, рис. 1А. Учет стационарного вращения глаза смерча проводится так же, как это сделано в [2]: часть тангенциальной кинетической энергии, накопленной в области конденсации, тратится на вращение глаза как твердого тела и формирование давления в глазе радиуса r_0 . Это приводит к понижению тангенциальной скорости в переходной области $r_0 \leq r \leq r_e$, где $r_e = 1.65 r_0$ [2]. В результате, для тангенциальной скорости и давления внутри глаза при $r < r_0$ получаем формулы, совпадающие с (23)-(25) в [2]. Эмпирические данные, показанные на рис. 1В, описывают Мулхаллское торнадо в момент времени, близкий к пику интенсивности [5]. Данные соответствуют характерной вертикальной скорости $w(r)$ при $z = 650$ м [5, рис. 4b],

средней радиальной скорости $u(r)$ на высоте $150 \text{ м} < z < 850 \text{ м}$ [5, рис. 4b] и тангенциальной скорости $v(r)$, усредненной на высоте $50 \text{ м} < z < 950 \text{ м}$ [5, рис. 5a].

Как видно из рис. 1B, наблюдаемое распределение средней тангенциальной скорости на $z \leq h$ справа от максимума хорошо согласуется со сделанным предположением о сохранении углового момента (3). Выбор $h = 1.2 \text{ км}$ (высота облаков) оправдан также тем, что радиальная скорость на этой высоте превышает $u_1 = 4.4 \text{ м/с}$ на значительной части области конденсации [5, рис. 4b]. (Два других изученных торнадо [3,4] имеют существенно более низкую область радиального притока $h \leq 400 \text{ м}$, чем Мулхаллское торнадо. Распределение тангенциальных скоростей в этих торнадо не согласуется с сохранением момента, что требует более детального учета и введения дополнительного параметра [2]).

Полное падение давления, соответствующее профилю на рис. 1A, составляет $3.6\Delta p = 108 \text{ hPa}$. Это находится в согласии с немногими имеющимися прямыми измерениями давления в торнадо. Падение давления 100 hPa было зафиксировано в интенсивном Манчестерском торнадо (Южная Дакота, 2003) той же категории интенсивности (F4), что и Мулхаллское [5].

4. Условия существования вихря и максимальные скорости

С учетом энергии стационарного вращения глаза [1] максимальная скорость в вихре (и, соответственно, максимальная кинетическая энергия) достигается в точке $r_e = 1.65 r_0$, рис. 1A, $v_{\max} = a/r_e$, где r_0 (10) является функцией a . Вращение Земли не сказывается на циркуляции торнадо в силу его малого размера. Поэтому величина a связана только со скоростью перемещения торнадо U , которая не может быть бесконечно малой, так как торнадо существует только за счет расхода водяного пара, накопленного в атмосфере и с необходимостью должно передвигаться [10]. Из рис. 2A следует, что максимальная скорость, достижимая в конденсационном вихре, слабо зависит от углового момента (с уменьшением a максимальная скорость растет логарифмически). Для реалистичных $a \geq 10^{-3}$ ($v_1 \geq 0.1 \text{ м/с}$) v_{\max} не превышает $1.7u_c \sim 120 \text{ м/с}$, что согласуется с оценками максимально возможных скоростей торнадо [5].

Существование вихря связано с определенным минимальным значением радиальной скорости u , при котором развивается конденсация. Эта скорость может быть интерпретирована как скорость, определяющая инерцию атмосферы по отношению к возникновению конденсационной циркуляции. При $u < u_1$ конденсация прекращается. Выполнение условия $u_0 = u_1$ соответствует следующим соотношениям

$$u'(r_0) = \frac{u_0}{r_0} (y'_0 - 1) = u_1 \left(y'_1 - \frac{1}{r_0} \right) \approx -\frac{u_1}{r_0}, \quad (13)$$

$$u'(r_1) = u_0 \left(\frac{y'_0}{r_0} - 1 \right) = u_1 (y'_1 - 1). \quad (14)$$

Они означают, что существует минимум скорости $u(r)$ при $r = r_{\min}$ в интервале $r_0 < r_{\min} < r_1$. Тот факт, что конденсация происходит при $u(r) > u_1$ означает, что есть также точка максимума $r = r_{\max}$ скорости $u(r)$, $r_0 < r_{\max} < r_1$. Следовательно, существует точка $r = r_n$, $r_0 < r_{\min} < r_n < r_{\max} < r_1$, где $u(r_n) = u_1$. При $r < r_n$ нет конденсации и нет конденсационного потенциала давления, способного ускорять воздух. При $r_n \gg r_0$ максимально возможная скорость ветра, a/r_e , не достигается: $v_{\max} = a/r_n \ll a/r_e$. Поэтому условием существования смерча является условие $\kappa \equiv (r_n - r_0)/r_0 \ll 1$ ($\kappa \approx 10^{-3}$ для вихря на рис. 1).

Анализ уравнения (7) показывает, что это условие нарушается с увеличением параметра h , что при фиксированной высоте атмосферы соответствует уменьшению линейного размера r_1 области конденсации. На рис. 2В показаны профили радиальной скорости, полученные для различных значений $0.01 \leq h \leq 10$ при $a = 0.12$ и $u_1 = 0.06$. При $h \geq 7.3$ имеем $y'_1 \geq 1$, $u'(r_1) \geq 0$, и максимум $u(r)$ при $r < r_1$ исчезает. Уменьшение a при фиксированном h также приводит к нарастанию параметра κ , рис. 2D. Отсюда следует, что чем меньше горизонтальный размер области конденсации, тем большая величина углового момента необходима для развития вихря. Для параметров вихря на рис. 1, в котором может наблюдаться скорость $v \approx u_c \approx 70$ м/с, критической величиной является $h \sim 1$, рис. 2С, что соответствует минимально возможной области конденсации радиусом около 1.2 км и радиусу воронки (глаза) порядка 90 м. При меньших a и r_1 могут развиваться только обычные шквалы.

Литература

- [1] A.M. Makarieva, V.G. Gorshkov, Phys. Lett. A 373 (2009) 4201.
- [2] A.M. Makarieva, V.G. Gorshkov, Phys. Lett. A 375 (2011) 1053.
- [3] K. Kosiba, J. Wurman, J. Atm. Sci. 67 (2010) 3074.
- [4] K.A. Kosiba, et al., Geophys. Res. Lett. 35 (2008) L05805.
- [5] W.-C. Lee, J. Wurman, J. Atm. Sci. 62 (2005) 2373.
- [6] D.A. Speheger, et al., Wea. Forecast. 17 (2002) 362.
- [7] R.L. Thompson, et al., Wea. Forecast. 18 (2003) 1243.
- [8] R.L. Tanamachi, et al., J. Atm. Ocean. Technol. 23 (2006) 1445.
- [9] J. Wurman, et al., Mon. Wea. Rev. 138 (2010) 4439.
- [10] V.G. Gorshkov, *Physical and Biological Bases of Life Stability* (1995) Springer, Berlin, pp. 227-229.

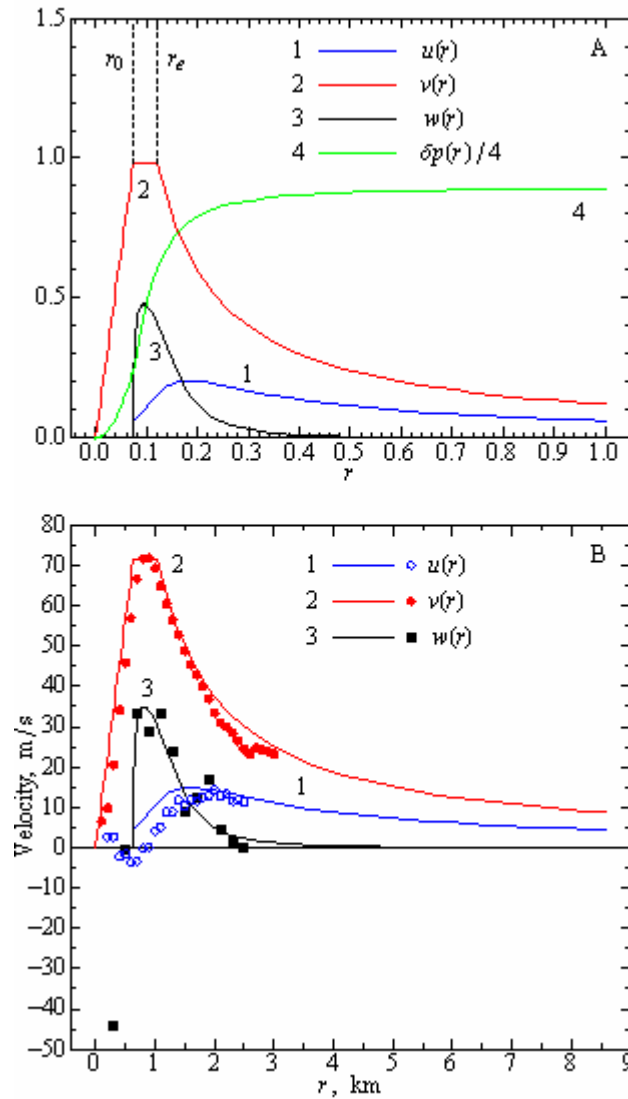


Рис. 1. А: Решение уравнения (7) при $a = 0.12$ ($r_0 = 0.074$), $u_1 = 0.06$, $h = 0.14$ в безразмерных единицах (4), $\delta p(r) \equiv p(r) - p(0)$. В: Сравнение с эмпирическими данными для Мулхаллского торнадо [5] при $u_c = 73$ м/с, $h = 1.2$ км ($r_1 = 8.5$ км). Отметим, что отрицательная вертикальная скорость и уменьшение радиальной скорости вблизи r_0 соответствуют линии тока в глазе торнадо, которая не описывается уравнением Бернулли (7) для конденсационной линии тока, описывающей движение воздуха внутрь области конденсации и вверх.

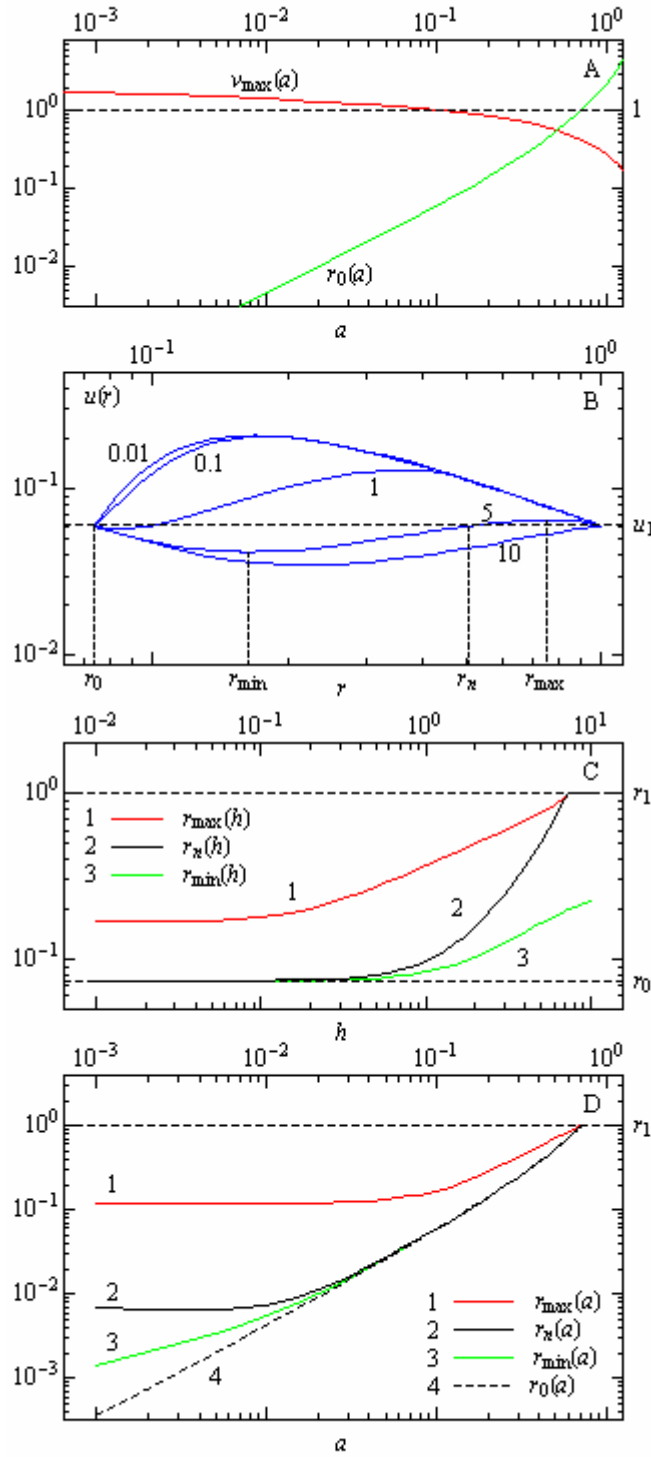


Рис. 2. А: Зависимость радиуса глаза r_0 и максимальной тангенциальной скорости $v_{\max} = a/r_e$, $r_e = 1.65 r_0$ [2] от углового момента a в безразмерных единицах (4). В: Радиальная скорость $u(r)$, полученная решением (7) при условии (10)-(11) и $a = 0.12$, $u_1 = 0.06$ для пяти значений h (показаны около кривых). Точки r_{\min} , r_{\max} , r_n , показанные для кривой при $h = 5$, соответствуют минимуму u , максимуму u и значению $u(r_n) = u_1$. С: Зависимость r_{\min} , r_{\max} , r_n от h при $a = 0.12$, $u_1 = 0.06$. D: Зависимость r_{\min} , r_{\max} , r_n от a при $h = 0.14$, $u_1 = 0.06$; $r_0(a)$ (10).